

2022山西高三上学期高中数学开学考试

1.

已知函数 $f(x) = |x+1|$

(1) 求不等式 $f(x) < |2x+1| - 1$ 的解集;

(2) 关于 x 的不等式 $f(x-2) + f(x-3) < a$ 的解集不是空集, 求实数 a 的取值范围.

2.

在平面直角坐标系 xOy 中, 倾斜角为 $\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \right)$ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho \cos^2 \theta - 4 \sin \theta = 0$.

(1) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 已知点 $P(1, 0)$. 若点 M 的极坐标为 $\left(1, \frac{\pi}{2} \right)$, 直线 l 经过点 M 且与曲线 C 相交于 A, B 两点, 求 A, B 两点间的距离 $|AB|$ 的值.

3.

已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

4.

已知 $\triangle ABC$ 的直角顶点 A 在 y 轴上, 点 $B(1, 0)$, D 为斜边 BC 的中点, 且 AD 平行于 x 轴.

(1) 求点 C 的轨迹方程;

(2) 设点 C 的轨迹为曲线 Γ , 直线 BC 与 Γ 的另一个交点为 E . 以 CE 为直径的圆交 y 轴于 M, N , 记此圆的圆心为 P , $\angle MPN = \alpha$, 求 α 的最大值.

5.

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AD = DC = AP = 2$, $AB = 1$, 点 E 为棱 PC 的中点.

