

2022陕西高三下学期北师大版高中数学高考模拟

1.

设函数 $f(x) = x - a(x+1)\ln(x+1)$, $(x > -1, a \geq 0)$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a=1$ 时, 若方程 $f(x)=t$ 在 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 上有两个实数解, 求实数 t 的取值范围;

(III) 证明: 当 $m > n > 0$ 时, $(1+m)^n < (1+n)^m$.

2.

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短半轴长为 1, 动点 $M(2, t) (t > 0)$ 在直线 $x = \frac{a^2}{c}$ (c 为半焦距) 上.

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 求以 OM 为直径且被直线 $3x - 4y - 5 = 0$ 截得的弦长为 2 的圆的方程;

(III) 设 F 是椭圆的右焦点, 过点 F 作 OM 的垂线与以 OM 为直径的圆交于点 N ,

求证: 线段 ON 的长为定值, 并求出这个定值.

3.

一个口袋中有 2 个白球和 n 个红球 ($n \geq 2$, 且 $n \in \mathbb{N}^*$), 每次从袋中摸出两个球 (每次摸球后把这两个球放回袋中), 若摸出的两个球颜色相同为中奖, 否则为不中奖.

(I) 试用含 n 的代数式表示一次摸球中奖的概率 p ;

(II) 若 $n=3$, 求三次摸球恰有一次中奖的概率;

(III) 记三次摸球恰有一次中奖的概率为 $f(p)$, 当 n 为何值时, $f(p)$ 取最大值.

4.

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, 且 $AB = AA_1$, E, F 分别是 CC_1, BC 的中点.

(I) 求证: $B_1F \perp$ 平面 AEF ;

(II) 求锐二面角 B_1-AE-F 的余弦值.