

山东省淄博市2022届高三数学上学期摸底考试试题

1.

已知函数 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, $f(x) = g(x) - ax$.

(I) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数, 求实数 a 的最小值;

(III) 若存在 $x_1, x_2 \in [e, e^2]$, 使 $f(x_1) \leq f'(x_2) + a$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

2.

设函数 $f(x) = a(x - \frac{1}{x}) - \ln x$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内不单调, 求实数 a 的取值范围;

(III) 设函数 $g(x) = \frac{e}{x}$, 若在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 使 $f(x_0) \geq g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

3.

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差大于 0 的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_3 a_4 = 70$, $a_2 + a_5 = 17$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$ (c 为非零常数), 若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 求 c 的值;

(III) 求证: $(\frac{1}{a_1})^2 + (\frac{1}{a_2})^2 + \dots + (\frac{1}{a_n})^2 < \frac{7}{6}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

4.

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差大于 0 的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_3 a_4 = 12$, $a_2 + a_5 = 7$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$ (c 为非零常数), 若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 求 c 的值;

(III) 设 $c_n = \frac{1}{a_n^2}$, $\{c_n\}$ 的前 n 和为 P_n , 试比较 P_n 与 2 的大小.

5.