

2022天津高中数学高考真题

1.

已知函数  $f(x) = x^3 + k \ln x (k \in \mathbb{R})$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(I) 当  $k=6$  时,

(i) 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(ii) 求函数  $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$  的单调区间和极值;

(II) 当  $k \geq -3$  时, 求证: 对任意的  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ , 且  $x_1 > x_2$ , 有  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ .

2.

已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $\{b_n\}$  为等比数列,  $a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 记  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求证:  $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 (n \in \mathbb{N}^+)$ ;

(III) 对任意的正整数  $n$ , 设  $c_n = \begin{cases} (3a_n - 2)b_n, & n \text{ 为奇数.} \\ a_n a_{n+2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$  求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和.

3.

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点为  $A(0, -3)$ , 右焦点为  $F$ , 且  $|OA| = |OF|$ , 其中  $O$  为原点.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 已知点  $C$  满足  $3\vec{OC} = \vec{OF}$ , 点  $B$  在椭圆上 ( $B$  异于椭圆的顶点), 直线  $AB$  与以  $C$  为圆心的圆相切于点  $P$ , 且  $P$  为线段  $AB$  的中点. 求直线  $AB$  的方程.

4.

如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $CC_1 \perp$  平面  $ABC, AC \perp BC, AC = BC = 2, CC_1 = 3$ , 点  $D, E$  分别在棱  $AA_1$  和棱  $CC_1$  上, 且  $AD = 1, CE = 2, M$  为棱  $AB_1$  的中点.